

선형대수학 중간고사 예상문제

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때 다음을 계산하시오

a. $tr(A)$ b. $-2A + 3B^T$

ans) $tr(A) = 1 + 2 = 3$ $-2A + 3B^T = -2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, B = (1 \ 6)$ 일 때 AB 을 계산하시오

ans) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$

3. 다음의 기약행사리꼴에 대하여 해를 구하라

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ans) 두, 세 번째 행이 모두 제로이므로, 무수히 많은 해를 갖고, 첫 행을 방정식으로 표현하면 $x + 2y + 3z = -1$ 이다. y, z 변수를 매개변수 s, t 로 표현하고, 다음과 같이 해집합을 표현할 수 있다.

$$x = -1 - 2s - 3t, y = s, z = t$$

4. $x + 2y + z = 2$ 연립방정식의 해를 가우스 소거법으로 구하라
 $3x + 8y + z = 12$
 $4y + z = 2$

ans)

-전진소거

-후치환

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2 \\ 12 \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2 \\ 6 \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2 \\ 6 \\ -10 \end{array}$$

$$5z = -10 \text{에서 } z = -2$$

$$2y - 2z = 6 \rightarrow 2y = 6 - 4 = 2 \rightarrow y = 1$$

$$x + 2y + z = 2 \rightarrow x = -2y - z + 2 = 2 \rightarrow x = 2$$

따라서, $x = 2, y = 1, z = -2$

5. 다음 v 의 놈과 단위벡터를 계산하라

$$v = (3, -5)$$

ans) $\|v\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$, 단위 벡터 $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{34}}(3, -5)$

6. 다음 행렬의 행렬식($\det(A)$)를 구하라

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

ans) -제1열대하여 여인수 전개를 하면

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{2+1} \text{ 다시 제1열에 여인수 전개하면}$$

$$\det(A) = -(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -24 - (-6) = -18$$

7. $u = (1, -1, 0)$ 이고, $a = (2, 0, 1)$ 일 때, u 의 a 방향성분과 직교방향성분벡터를 구하시오

ans) u의 a방향성분벡터

$$u \cdot a = 2 + 0 + 0 = 2, \quad \|a\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 1^2 = 5$$

$$proj_a u = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = \frac{2}{5}(2, 0, 1) \quad \text{u의 a직교방향성분벡터}$$

$$u - proj_a u = (1, -1, 0) - \frac{2}{5}(2, 0, 1) = \left(\frac{1}{5}, -1, -\frac{2}{5}\right)$$

8. 평면방정식 $x + 2y - 3z = 1$ 의 벡터방정식과 매개변수방정식을 구하라

ans) 위식을 $x = 1 - 2y + 3z$ 으로 표현하고, 오른쪽 변수를 매개변수 t_1, t_2 로 표현하면

매개변수방정식: $x = 1 - 2t_1 + 3t_2, y = t_1, z = t_2$

$$\text{벡터 방정식: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2t_1 + 3t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2$$

9. 평행인 두평면 $x + 2y - 2z = 3, 2x + 4y - 4z = 4$ 사이의 거리를 구하라

ans)

첫 평면상의 임의점 P를 구하면, $y=z=0$ 라고 하면 $x=3$ 를 만족한다. $\rightarrow P(3,0,0)$

$$\text{또한 첫평면에 수직인 단위벡터 } \hat{n} = \frac{n}{\|n\|} = \frac{(1, 2, -2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$$

두 번째 평면상의 임의점Q를 구하면 $y=z=0$ 라고 하면 $x=2$ 를 만족한다. $\rightarrow Q(2,0,0) \quad QP = (-1, 0, 0)$ 이므로

$$\text{, 거리 } D = |QP \cdot \hat{n}| = \frac{1}{3} |-1 + 0 + 0| = \frac{1}{3}$$

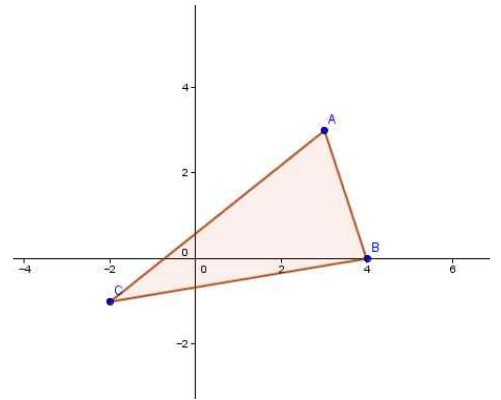
10. 다음 세꼭지점으로 하는 삼각형의 면적을 구하라

$A(3,3,0), B(4,0,0), C(-2,-1,0)$

ans) 두벡터 사이의 면적은 $A = \|a \times b\| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ 를 이용하여 계산

$$a = \overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{BC} \text{ 로 두면 } a = (5, 4, 0), b = (6, 1, 0)$$

$$\text{삼각형 면적 } S = \frac{A}{2} = \left\| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \|(5-24)k\| = \frac{19}{2}$$



sage 프로그램 예상문제

1. 다음 명령어 값들을 구하라

a) $10\%3$ b) $x=\text{range}(5)$

2. 함수 $f(x) = e^{-2x} \cos x$ 값을 갖는 계산하는 명령어는?

3. 다음 과 같은 행렬A, 벡터b를 입력하는 명령어는? $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

4. 다음과 같이 함수문을 작성하고 명령어 창에서 다음값이 입력하면

>>foo(5)의 결과값은?

```
def foo(n):
    return n^2+1
```