

Chap 7. 선형대수학

행렬, 벡터, 행렬식, 선형연립방정식

서울과학기술대학교

자동차 공학과

이상훈

0. 행렬에 들어가기 전에...

✚ 행렬은 왜 배우는가?

◆ 식과 계산을 효율적으로 해주기 때문

● 연립방정식 풀기

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ 10x_2 + 25x_3 & = & 90 \\ 20x_1 + 10x_2 & = & 80 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 25 \\ 20 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 90 \\ 80 \end{bmatrix}$$

● 미분 연립방정식 풀기

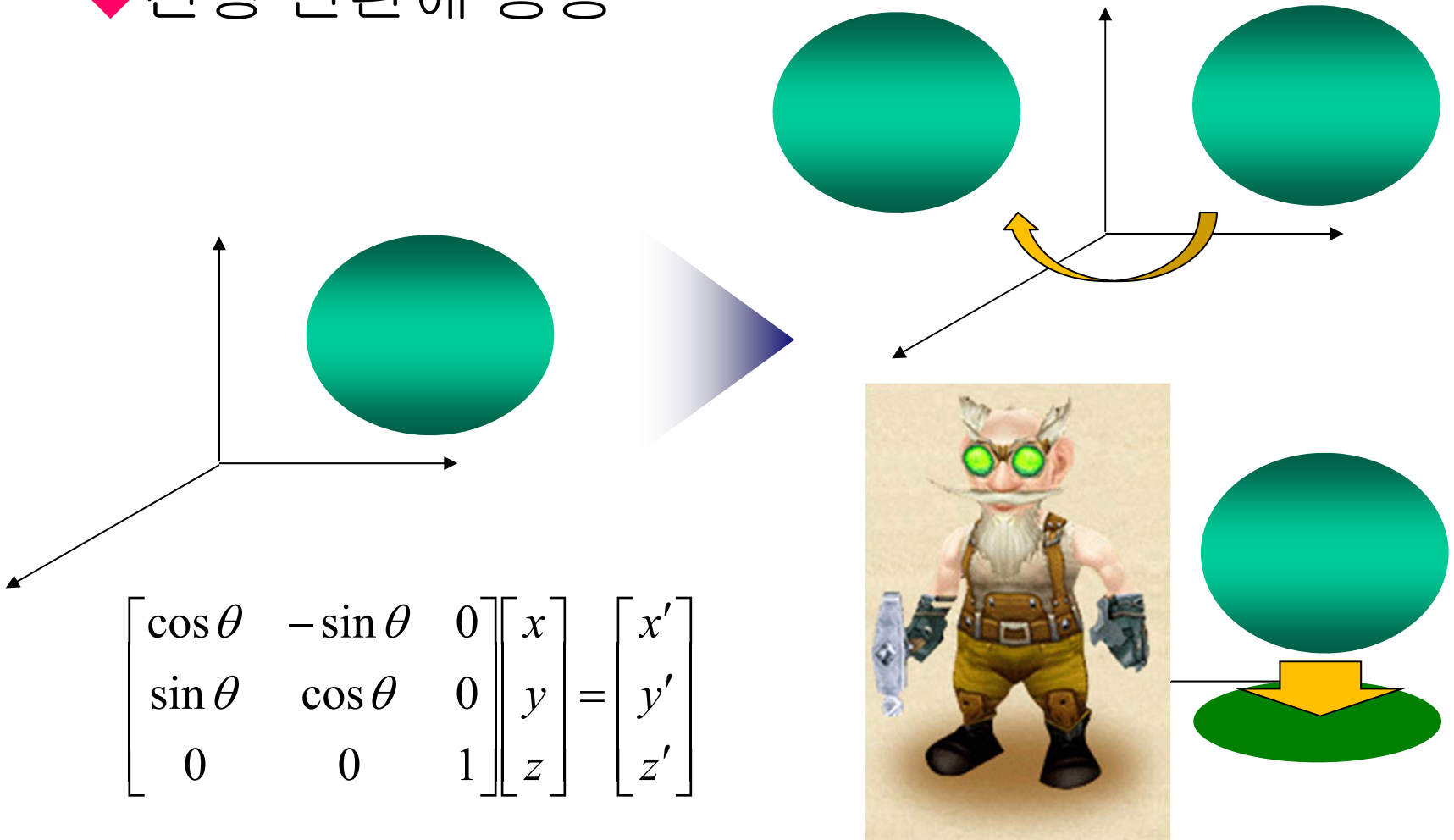
$$\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t) + 3u(t) \end{array} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}(t)$$

0. 행렬에 들어가기 전에...

✚ 행렬은 왜 배우는가?

◆ 선형 변환에 응용

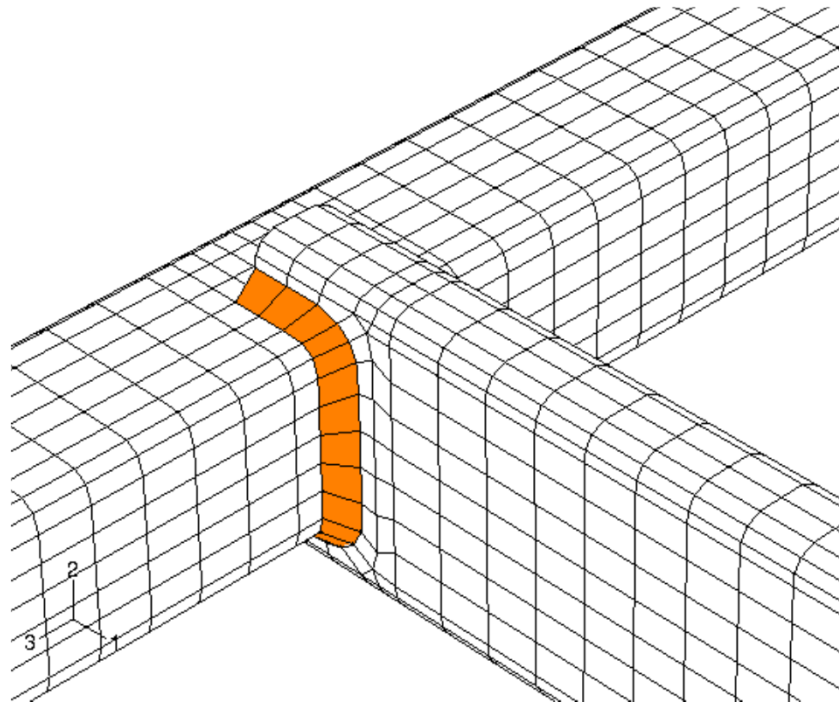


$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

0. 행렬에 들어가기 전에...

✚ 행렬은 왜 배우는가?

◆ 유한요소법에 응용 (Battelle Co.)



- 조그만 네모(mesh)의 물리값들을 행렬을 이용하여 연결, 해석함

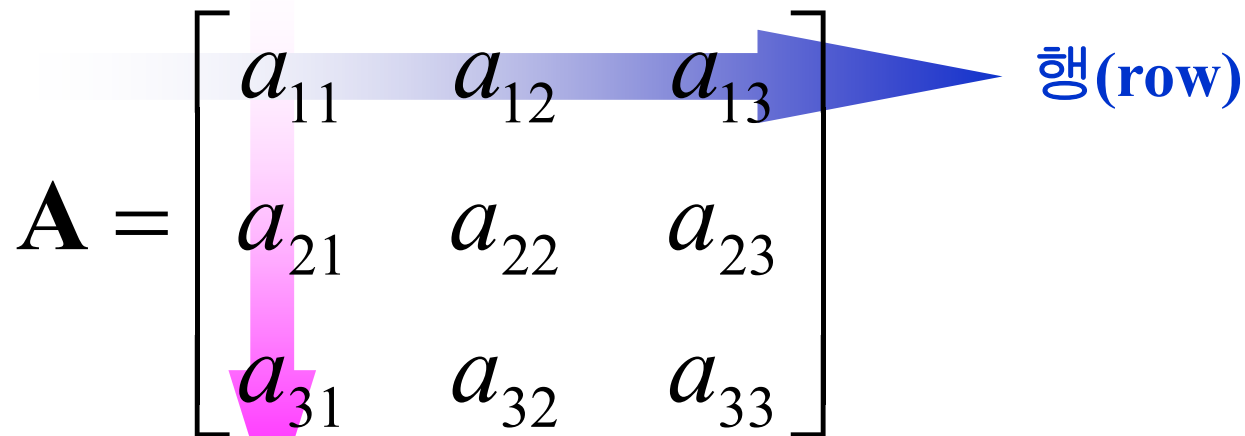
1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

✚ 행렬에 대한 기본 개념, 표기법, 종류

✚ 행렬(Matrix)이란?

◆ 수(혹은 함수)들을 직사각형 모양으로 괄호 안에 배열해 놓은 것

● 수(혹은 함수): 원소(entry) 혹은 요소(element)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$


The diagram shows a 3x3 matrix $\mathbf{A}$ with elements a_{ij} . A blue arrow points from the first row to the label '행(row)' on the right. A pink arrow points from the first column to the label '열(column)' below the matrix.

열(column)

$\mathbf{A} : 3(\text{행수}) \times 3(\text{열수}) \text{행렬}$

1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

✚ 일반적인 표기법

$$\mathbf{A} : m \times n \text{ 행렬} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- ◆ 행렬은 굵은 대문자로
- ◆ 행렬의 크기는 행x열 형태로
- ◆ 첫 번째 첨자 j는 행(Row)
- ◆ 두 번째 첨자 k는 열(Column)
 - a_{jk} : j행, k열의 원소(Element) → i, j, k, l, ... 모두 O.K.

1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

✚ 문제

◆ ?x? 행렬

◆ $a_{34} = ?$

$$[a_{jk}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 10 & 1 \\ 3 & 57 & 8 & 9 & 6 \\ 2 & 5 & 32 & 9 & 34 \\ 4 & 54 & 2 & 26 & 73 \end{bmatrix}$$

◆ ?x? 행렬

$$[a_{jk}] = \begin{bmatrix} 23 & 12 & 5 & 6 \\ 2 & 45 & 7 & 93 \end{bmatrix}$$

◆ $a_{32} = ?$

1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

+ 행렬의 종류

◆ 정방행렬 (Square matrix)

● $m=n$ 일 때

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : n \times n \text{ 행렬}$$

주대각선
(Principle Diagonal)

1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

+ 행렬의 종류

◆ 직사각행렬 (Rectangular Matrix)

- $m \neq n$ 일 때

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 23 & 12 & 5 & 6 \\ 2 & 45 & 7 & 93 \end{bmatrix}$$

◆ 영행렬 (Zero Matrix)

- 모든 요소가 0인 행렬

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

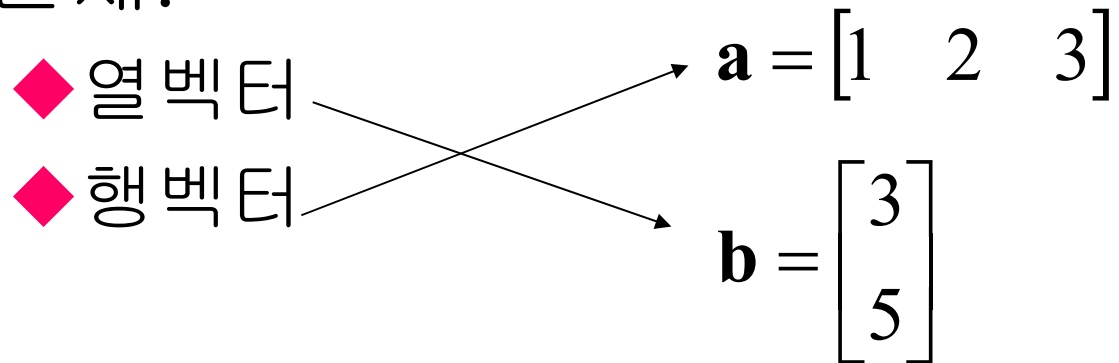
1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

◆ 벡터

- 하나의 행 혹은 열로 이루어진 행렬
 - 행벡터 (Row vector), 열벡터 (Column vector)
- 소문자 볼드체로 씀
- 각각의 원소를 성분(component)이라 함

$$\mathbf{a} = [a_j] = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

✚ 문제:



1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

+ 행렬의 상등

◆ 두 행렬, $\mathbf{A}=[a_{jk}]$, $\mathbf{B}=[b_{jk}]$ 가 같다

- 크기가 같다: 행과 열의 개수가 같다
- 각 대응원소가 같다: $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, ...

+ 문제:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

+ 행렬의 덧셈

◆ 두 행렬, $\mathbf{A}=[a_{jk}]$, $\mathbf{B}=[b_{jk}]$

- 서로 같은 크기의 행렬만 더할 수 있다
- 각각의 원소의 합으로 표시된다 $a_{11}+b_{11}$, $a_{12}+b_{12}$, ...

+ 문제:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

+ 행렬의 스칼라곱

◆ 임의의 $m \times n$ 행렬, $\mathbf{A}=[a_{jk}]$ 와 스칼라 c 의 곱

- $c\mathbf{A}=[ca_{jk}]$

- $\mathbf{A}$ 행렬의 각 원소에 c 를 각각 곱해서 구한다

+ 문제:

$$3 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 2 \\ 3 \times 6 & 3 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 18 & 21 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$$

1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

+ 행렬의 뺄셈

◆ 같은 크기의 두 행렬, $\mathbf{A}=[a_{jk}]$, $\mathbf{B}=[b_{jk}]$

● 각각의 원소의 뺄셈으로 표시된다 $a_{11}-b_{11}, a_{12}-b_{12}, \dots$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = [a_{jk} - b_{jk}]$$

+ 문제:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱

✚ 행렬의 덧셈과 스칼라곱을 이용한 법칙들

◆ 같은 크기의 세 행렬, $\mathbf{A}=[a_{jk}]$, $\mathbf{B}=[b_{jk}]$, $\mathbf{C}=[c_{jk}]$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$$

$$(c + k)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + k\mathbf{A}$$

$$c(k\mathbf{A}) = (ck)\mathbf{A} = ck\mathbf{A}$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

2. 행렬의 곱

+ 행렬의 곱

◆ 임의의 4×3 행렬 $\mathbf{A}=[a_{jk}]$ 와, 3×2 행렬 $\mathbf{B}=[b_{jk}]$

◆ 두 행렬의 곱을 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$

● 곱셈 방식

– 앞 행렬의 행과, 뒷행렬의 열을 곱한다

$$\begin{array}{c} \text{1행} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

1열

2. 행렬의 곱

+ 행렬의 곱

◆ 임의의 $m \times n$ 행렬 $\mathbf{A}=[a_{jk}]$ 와, $r \times p$ 행렬 $\mathbf{B}=[b_{jk}]$

◆ 두 행렬의 곱을 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$

- 필수조건: $n=r$ (크기가 같을 필요가 없다)
- 최종 $\mathbf{C}$ 행렬은 $m \times p$ 행렬이 된다
- 곱셈 방식
 - 앞 행렬의 행과, 뒷행렬의 열을 곱한다

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk}$$

$$(j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p)$$

2. 행렬의 곱

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk}$$

문제

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -2 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

2. 행렬의 곱

✚ 행벡터와 열벡터를 이용한 곱

◆ $\mathbf{a}_j$: 행렬 $\mathbf{A}$ 의 j 번째 행벡터

◆ $\mathbf{b}_k$: 행렬 $\mathbf{B}$ 의 k 번째 열벡터

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rp} \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p]$$

2. 행렬의 곱

+ 행벡터와 열벡터를 이용한 곱

◆ $\mathbf{a}_j$: 행렬 $\mathbf{A}$ 의 j 번째 행벡터

◆ $\mathbf{b}_k$: 행렬 $\mathbf{B}$ 의 k 번째 열벡터

◆ $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ 에서 각 요소 $c_{jk}=\mathbf{a}_j\mathbf{b}_k$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_p \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ab}_1 & \mathbf{Ab}_2 & \cdots & \mathbf{Ab}_p \end{bmatrix}$$

2. 행렬의 곱

예제 6

$$\mathbf{A}[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p] = [\mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_p]$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 34 \\ -17 & 8 & -23 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ab}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -17 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ab}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 4 & 34 \\ -17 & 8 & -23 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ab}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ -23 \end{bmatrix}$$

2. 행렬의 곱



+ 행렬의 곱의 성질

◆ 일반적으로 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} : \text{결합법칙 (Associative Law)}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} : \text{분배법칙 (Distributive Law)}$$

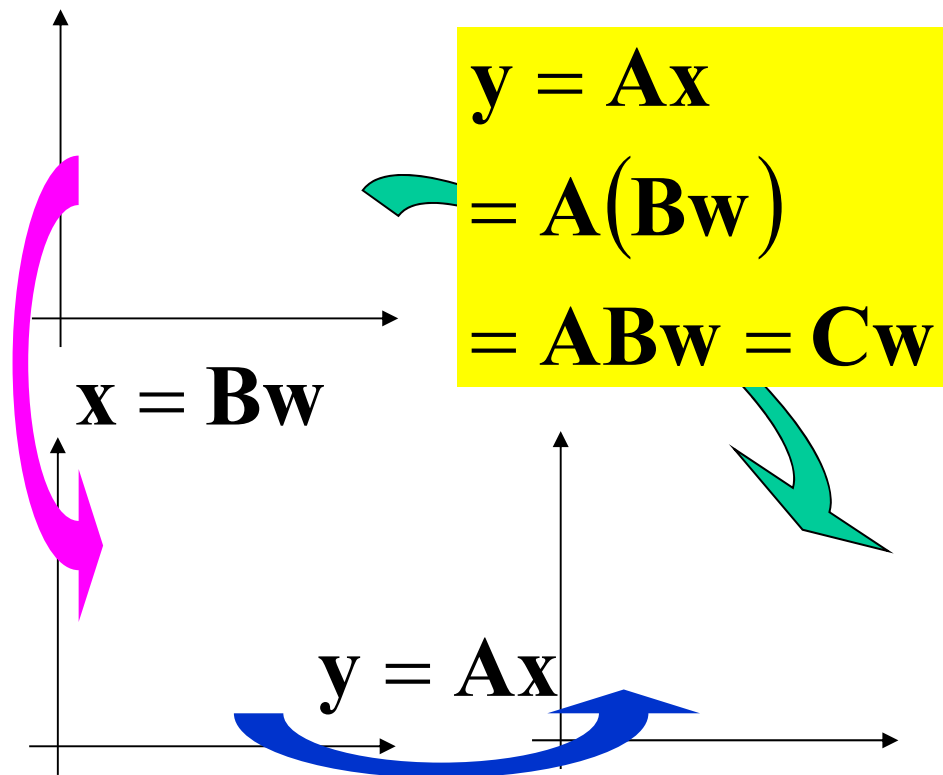
$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB} : \text{분배법칙 (Distributive Law)}$$

2. 행렬의 곱



✚ 행렬의 곱의 유례

◆ 일차변환에 의한 행렬 곱의 유례



$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{w}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

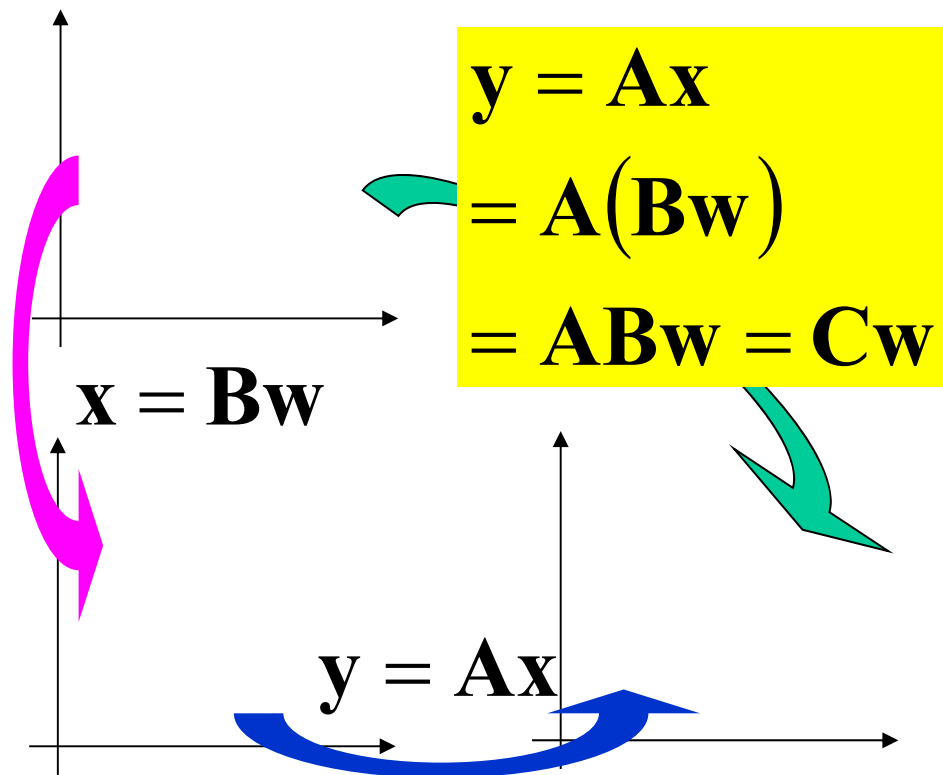
$$x_1 = b_{11}w_1 + b_{12}w_2$$

$$x_2 = b_{21}w_1 + b_{22}w_2$$

2. 행렬의 곱

+ 행렬의 곱의 유례

◆ 일차변환에 의한 행렬 곱의 유례



$$y = Ax$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

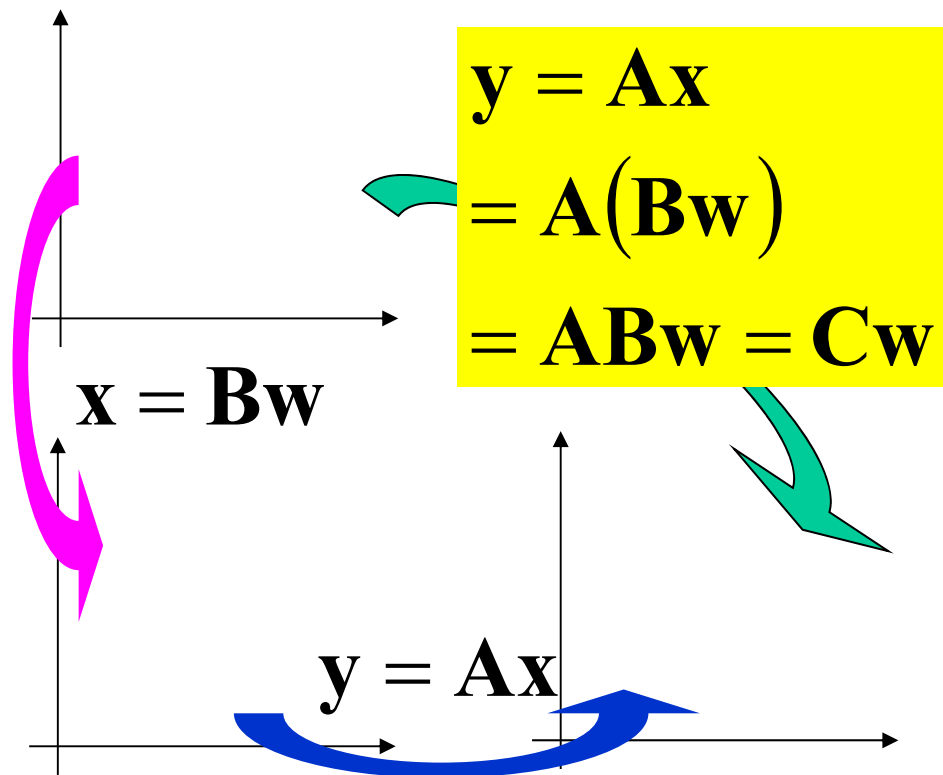
$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

2. 행렬의 곱

+ 행렬의 곱의 유래

◆ 일차변환에 의한 행렬 곱의 유래



$$\begin{cases} x_1 = b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ x_2 = b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$



$$y_1 = c_{11}w_1 + c_{12}w_2$$

$$y_2 = c_{21}w_1 + c_{22}w_2$$

2. 행렬의 곱

+ 행렬의 곱의 유례

◆ 일차변환에 의한 행렬 곱의 유례

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ y_2 = c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{cases} \begin{cases} y_1 = a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ \quad = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})w_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})w_2 \\ y_2 = a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ \quad = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})w_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})w_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \mathbf{w}$$

2. 행렬의 곱

✚ 여러 가지 행렬을 이해하고 활용한다

◆ 전치, (반)대칭, 삼각, 대각, 스칼라, 단위행렬

✚ 행렬의 전치 (Transposed matrix)

◆ 임의의 $m \times n$ 행렬, $\mathbf{A}=[a_{jk}]$ 의 전치행렬: $\mathbf{A}^T=[a_{kj}]$

● 행과 열을 바꾼 행렬

$$\mathbf{A}^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2. 행렬의 곱

문제

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^T)^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

2. 행렬의 곱

✚ 전치 행렬의 성질

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$(c\mathbf{A})^T = [ca_{jk}]^T = [ca_{kj}] = c[a_{kj}] = c[a_{jk}]^T = c\mathbf{A}^T$$

2. 행렬의 곱

✚ 대칭행렬 (Symmetric matrix)

◆ $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ 인 행렬

● $a_{kj} = a_{jk}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

✚ 반대칭행렬 (Skew-symmetric matrix)

◆ $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ 인 행렬

● $a_{kj} = -a_{jk}$

● $a_{jj} = 0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -21 & 3 \\ 21 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 행렬의 곱

+ 삼각 행렬 (Triangular matrix)

◆ 위삼각행렬 (Upper triangular matrix)

- 정방 행렬 중에서 주대각선 아래쪽이 0인 행렬

◆ 아래삼각행렬 (Lower triangular matrix)

- 정방 행렬 중에서 주대각선 위쪽이 0인 행렬

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -21 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 행렬의 곱

✚ 대각 행렬 (Diagonal matrix)

◆ 주대각선 상의 원소만이 0이 아닌 행렬

◆ 스칼라 행렬 (Scalar matrix)

● 대각행렬 중 주대각선 원소가 모두 같은 행렬

● $\mathbf{AS}=\mathbf{SA}=c\mathbf{A}$

◆ 단위 행렬 (Identity matrix)

● 대각행렬 중 주대각선의 원소가 모두 1인 행렬

● $\mathbf{IA}=\mathbf{AI}=\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 행렬의 곱

✚ 예제: Markov 과정

◆ 초기: 상업A(25%), 공업B(20%), 주거C(55%)

- 1년이 지날 때마다 다음과 같이 변화한다
- 상업지역의 20%가 공업지역으로 바뀌고, 10%가 주거 지역으로 바뀐다.
- 공업지역의 10%가 주거지역으로 바뀌고 90%는 공업지역으로 남는다
- 주거지역의 20%가 공업지역으로 바뀌고 80%는 주거지역으로 남는다.

$$\begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{bmatrix}$$

2. 행렬의 곱



예제: Markov 과정

◆ 초기: 상업(25%), 공업(20%), 주거(55%)
상업 공업 주거

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{상업으로} \\ \text{공업으로} \\ \text{주거로} \end{array}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5 \\ 34.0 \\ 48.5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{상업} \\ \text{공업} \\ \text{주거} \end{array}$$

2. 행렬의 곱

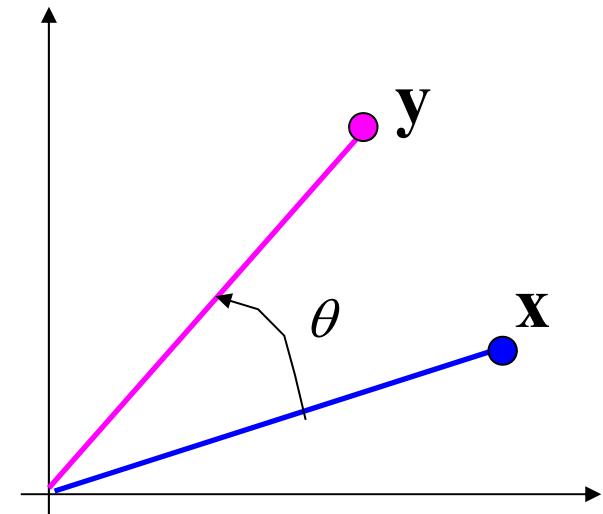
✚ 예제: 평면에서의 회전

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

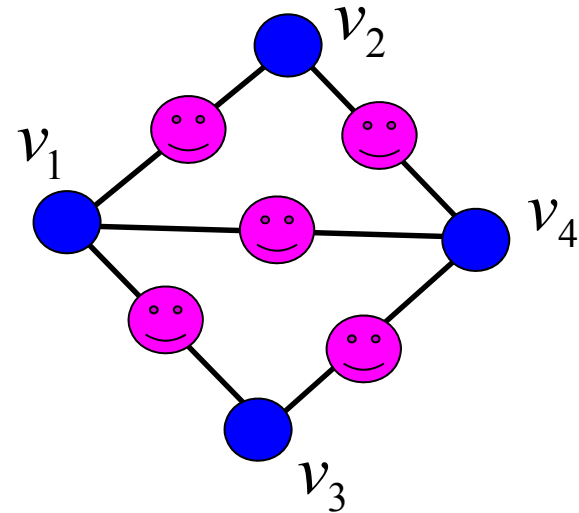


2. 행렬의 곱

예제: 인접 행렬

◆ 한번에 갈 수 있으면 1, 아니면 0

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{array}{l} v_1 \text{출발} \\ v_2 \text{출발} \\ v_3 \text{출발} \\ v_4 \text{출발} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

4 선형연립방정식의 행렬표현을 이해한다

[illegible]

- ◆ 제차연립방정식(Homogeneous Simultaneous System): b_j 가 모두 0인 경우
- ◆ 비제차연립방정식(Nonhomogeneous Simultaneous System): b_j 중 적어도 하나는 0이 아닌 경우

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ 선형연립방정식의 행렬표현: $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

◆ 계수행렬(Coefficient Matrix): $\mathbf{A}$

◆ 해벡터(Solution Vector): $\mathbf{x}$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

◆ 첨가행렬 (Augmented matrix) : 계수행렬 $\mathbf{A}$ 에 열 벡터 $\mathbf{b}$ 를 첨가한 행렬

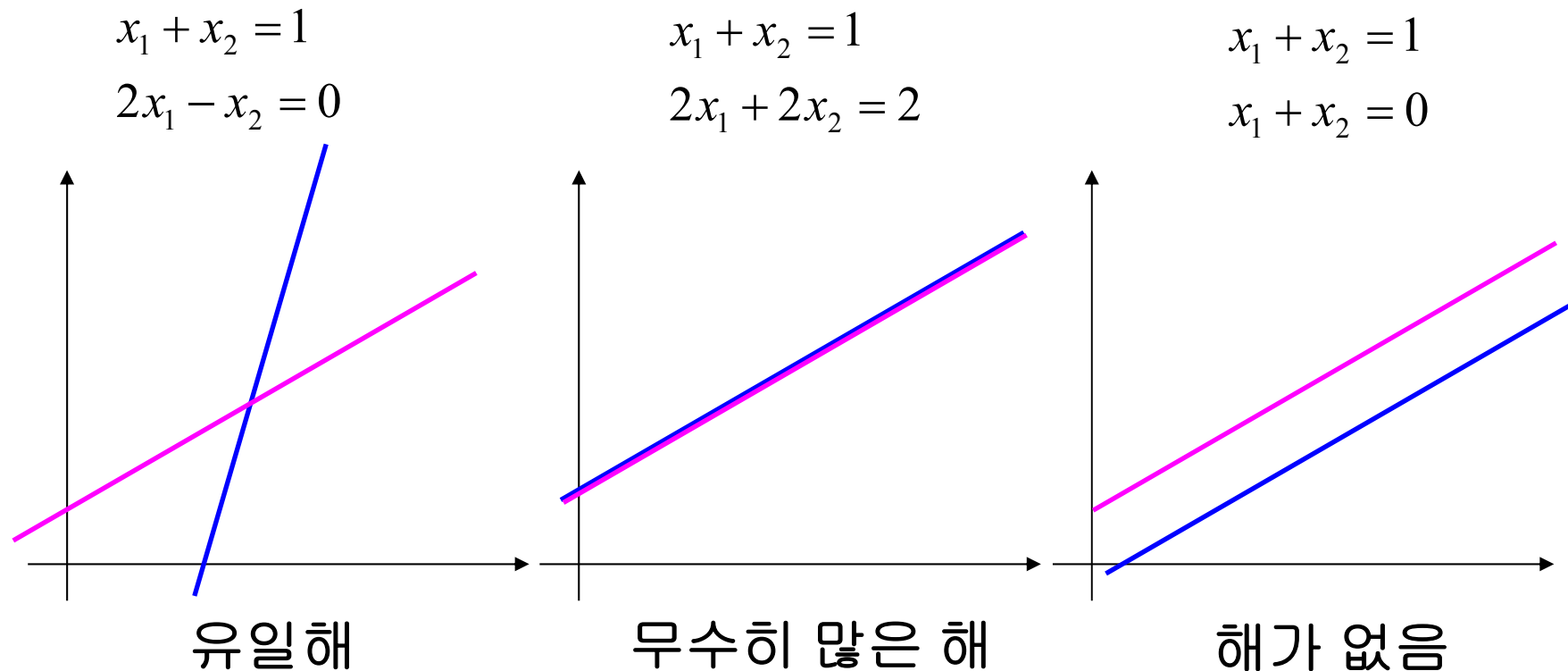
$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ 해의 존재성과 유일성

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$



3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ Gauss 소거법 (Gauss elimination)

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 6x_2 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

◆ Step 1. x_1 의 소거 (삼각행렬화)

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 6x_2 = -2 \\ -10x_2 = 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{추축} \nearrow \\ \text{추축 방정식} \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & -2 \\ 0 & -10 & 10 \end{array} \right]$$

◆ Step 2. 후치환 (Back substitution)

$$x_2 = \frac{10}{-10} = -1 \quad x_1 = \frac{1}{2}(-2 - 6x_2) = \frac{4}{2} = 2$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ Gauss 소거법 (Gauss elimination)

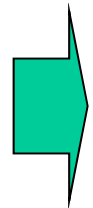
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{array} \right] \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ -6x_3 = -6 \end{array}$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ Gauss 소거법 (Gauss elimination)

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & | & 14 \\ 1 & 4 & 6 & | & 8 \\ 1 & 1 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 6x_2 + 4x_3 = 14 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{array}$$


$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 1 & 4 & 6 & | & 8 \\ 0 & 6 & 4 & | & 14 \end{bmatrix}$$

부분추축화
(partial pivoting)

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

+ 기본행연산, 행동치 연립방정식

◆ 방정식에 대한 기본연산

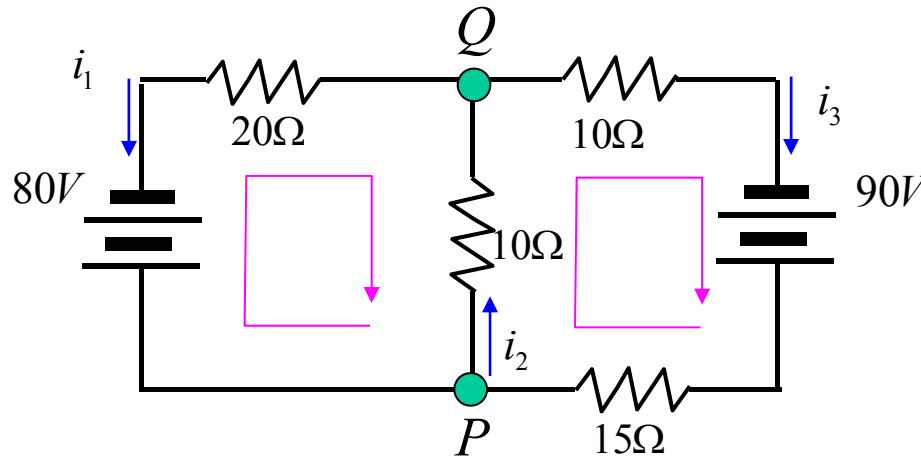
- 두 방정식을 교환
- 한 방정식의 상수배를 다른 방정식에 더함
- 한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱함

◆ 행렬에 대한 기본행연산

- 두 행을 교환: 부분 추축화(partial pivoting)
- 한 행의 상수배를 다른 행에 더함
- 한 행에 0이 아닌 상수를 곱함

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

예제: 키르히호프의 전압-전류 법칙



◆ 전류법칙: 한 점에서 나가고 들어가는 전류합=0

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 + i_3 &= 0 \\ -i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \end{aligned}$$

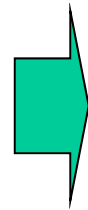
◆ 전압법칙: 폐회로에서 모든 전압 강하의 합=0

$$\begin{aligned} 10i_2 + 25i_3 &= 90 \\ 20i_1 + 10i_2 &= 80 \end{aligned}$$

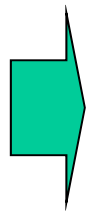
3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

예제:

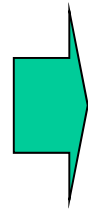
$$\begin{array}{rcl} i_1 & - & i_2 + i_3 = 0 \\ -i_1 & + & i_2 - i_3 = 0 \\ & & 10i_2 + 25i_3 = 90 \\ 20i_1 + 10i_2 & & = 80 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} i_1 & - & i_2 + i_3 = 0 \\ & & 0 = 0 \\ & & 10i_2 + 25i_3 = 90 \\ 30i_2 - 20i_3 & & = 80 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} i_1 & - & i_2 + i_3 = 0 \\ & & 10i_2 + 25i_3 = 90 \\ & & 30i_2 - 20i_3 = 80 \\ & & 0 = 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} i_1 & - & i_2 + i_3 = 0 \\ & & 10i_2 + 25i_3 = 90 \\ & & -95i_3 = -190 \\ & & 0 = 0 \end{array}$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

예제:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{array} \right]$$

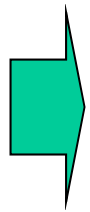
추축 방정식



추축

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \end{array} \right]$$

부분 추축화



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & -95 & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ 기본 행연산을 이용하여 미지수를 하나씩 소거하여 대각선 아래의 계수를 0으로 만듦

◆ 행-동치(Row-Equivalent)

- 선형시스템 S_1 이 선형시스템 S_2 에 유한번의 기본행연산을 가하여 얻어질 수 있다면 S_1 을 S_2 의 **행동치**라 한다.

◆ 행-동치 연립방정식(Row-Equivalent Systems)

- 행동치 연립방정식들은 같은 해집합을 갖는다

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 11\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 11 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 &= 7\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -x_2 &= -3\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 + 1.5x_2 &= 5.5\end{aligned}$$

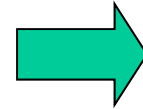
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1.5 & 5.5 \end{array} \right]$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

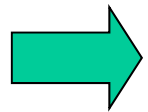
$$3x + 2y + z = 3$$

$$2x + y + z = 0$$

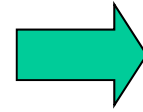
$$6x + 2y + 5z = -5$$



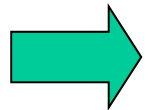
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 5 & -5 \end{array} \right]$$



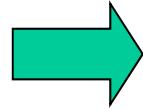
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 5 & -5 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 3 & -11 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$



$$\begin{aligned} x &= -4 \\ \therefore y &= 7 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ Gauss 소거법 : 연립방정식의 세 가지 경우

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 7 \\ + 3x_2 + 2x_3 & = & 5 \\ 2x_3 & = & 2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \quad \text{하나의 해}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 7 \\ + 3x_2 + 2x_3 & = & 5 \\ 2x_3 & = & 2 \\ 0x_3 & = & 0 \\ 0x_2 & = & 0 \end{array} \quad - \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] - \quad \text{하나의 해}$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ Gauss 소거법 : 연립방정식의 세 가지 경우

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 0x_3 = 2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \quad \text{해가 없다}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_3 = 2 \\ 0x_3 = 0 \\ 0x_2 = 1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{해가 없다}$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ Gauss 소거법 : 연립방정식의 세 가지 경우

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 7 \\ + 3x_2 + 2x_3 & = & 5 \\ 0x_3 & = & 0 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{해가 무수히 많다}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 7 \\ 3x_3 & = & 2 \\ 0x_3 & = & 0 \\ 0x_3 & = & 0 \\ 0x_2 & = & 0 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{해가 무수히 많다}$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ Gauss 소거법 : 연립방정식의 세 가지 경우

◆ 하나의 해

- $r = n$

- $\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$

◆ 무수히 많은 해

- $r < n$

- $\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$

◆ 해가 없음

- $r < m$

- $\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_m$ 중 하나라도 0이 아닌 경우

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & c_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} & \tilde{b}_2 \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & k_{rr} & \cdots & k_{rn} & \tilde{b}_r \\ & & & & & & \tilde{b}_{r+1} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \tilde{b}_m \end{array} \right]$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ 문제

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array} \right] \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right]$$

해가 없음: 모순되었다

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 10 \end{array} \right] \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

무수히 많은 해

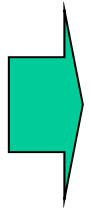
3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

문제

$$\begin{aligned}y + z &= -2 \\4y + 6z &= -12 \\x + y + z &= 2\end{aligned}$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & -12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & -12 \end{array} \right]$$

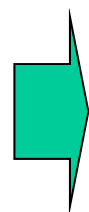


$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right]$$

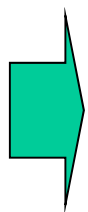
3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

문제

$$\begin{aligned}4y + 4z &= 24 \\ 3x - 11y - 2z &= -6 \\ 6x - 17y + z &= 18\end{aligned}$$



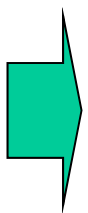
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & -11 & -2 & -6 \\ 6 & -17 & 1 & 18 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -11 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 24 \\ 6 & -17 & 1 & 18 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -11 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 24 \\ 0 & 5 & 5 & 30 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -11 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 30 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -11 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

문제

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -11 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$3x - 11y - 2z = -6$$

$$y + z = 6$$

$$z = -y + 6$$

첫번째 식에 대입

$$3x - 11y + 2y - 12 = -6$$

$$\therefore 3x - 9y = 6$$

$$\therefore z = -y + 6$$

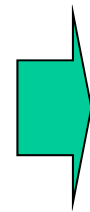
$$x = 3y + 2$$

y 는 임의의 수

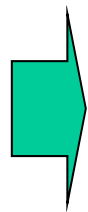
3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ 문제

$$\begin{aligned}x + y - 2z &= 0 \\ -4w - x - y + 2z &= -4 \\ -2w + 3x + 3y - 6z &= -2\end{aligned}$$



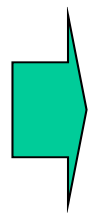
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 3 & -6 & -2 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & 2 & -4 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 14 & 0 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}-2w + 3x + 3y - 6z &= -2 \\ x + y - 2z &= 0\end{aligned}$$

3. 선형연립방정식. Gauss 소거법

✚ 문제

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$-2w + 3x + 3y - 6z = -2$$

$$x + y - 2z = 0$$

$$x = -y + 2z$$

첫번째 식에 대입

$$-2w = -2$$

$$\therefore w = 1$$

$$x = -y + 2z$$

y, z 는 임의의 수

5. 선형연립방정식의 해

✚ 선형연립방정식의 존재성과 유일성을 이해한다.

✚ n 개의 미지수($x_1, \dots, x_n$)에 대한 m 개의 선형연립방정식이 있다

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

5. 선형연립방정식의 해

✚ 선형연립방정식에 대한 기본 정리

◆ 존재성 (Existence)

- 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수($r \leq n$)를 가진다

(n : 미지수 개수)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} \quad \tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & 3 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

계수: 3

하나의 해

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & | & 7 \\ 0 & 7 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$

계수: 2

무수히 많은 해

5. 선형연립방정식의 해

+ 선형연립방정식에 대한 기본 정리

◆ 유일성 (Uniqueness)

- 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수($r = n$)를 가진다

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

계수: 3

하나의 해

5. 선형연립방정식의 해



✚ 선형연립방정식에 대한 기본 정리

◆ 무수히 많은 해 (infinitely many solutions)

- $r < n$ 이면 r 개의 미지수를 $n-r$ 개의 다른 미지수로 표현

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

계수: 2

무수히 많은 해

$$\begin{cases} x_2 = 5 - 2x_3 \\ x_1 = 7 - x_3 \\ x_3 \text{는 임의의 수} \end{cases}$$

◆ 가우스 소거법 (Gauss elimination)

- 해가 존재한다면 가우스 소거법으로 구할 수 있다

5. 선형연립방정식의 해

✚ 선형연립방정식에 대한 기본 정리

◆ 존재성 (Existence)

- 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수($r \leq n$)를 가진다

◆ 증명

- 행렬 $\mathbf{A}$ 의 열벡터 $\mathbf{c}_{(1)}, \dots, \mathbf{c}_{(n)}$ 를 이용해 식을 표현하면

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \mathbf{c}_{(2)}x_2 + \dots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{b}$$

- 첨가행렬 $\tilde{\mathbf{A}}$ 는 $\mathbf{A}$ 에 $\mathbf{b}$ 를 더해서 만든 행렬로서 이 식의 해 $\mathbf{x}$ 가 존재한다면 $\mathbf{b}$ 는 $\mathbf{A}$ 행렬의 열벡터의 일차 결합으로 표현됨을 알 수 있다
- 따라서, 열($\mathbf{b}$)이 하나 더 첨가 되었으나 계수는 그대로가 된다

5. 선형연립방정식의 해

✚ 선형연립방정식에 대한 기본 정리

◆ 유일성 (Uniqueness)

- 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수($r = n$)를 가진다

◆ 증명

- 행렬 $\mathbf{A}$ 의 계수가 n 이므로 n 개의 열벡터 $\mathbf{c}_{(1)}, \dots, \mathbf{c}_{(n)}$ 가 1차 독립이다. 이때, $\mathbf{b}$ 를 나타내는 식이 유일하지 않다고 하자

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \mathbf{c}_{(2)}x_2 + \dots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{c}_{(1)}\tilde{x}_1 + \mathbf{c}_{(2)}\tilde{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_{(n)}\tilde{x}_n$$

$$\mathbf{c}_{(1)}(x_1 - \tilde{x}_1) + \mathbf{c}_{(2)}(x_2 - \tilde{x}_2) + \dots + \mathbf{c}_{(n)}(x_n - \tilde{x}_n) = \mathbf{0}$$

- $\mathbf{c}_{(1)}, \dots, \mathbf{c}_{(n)}$ 가 1차 독립이므로 각각의 계수가 0이어야 하며, 이것은 $x_n = \tilde{x}_n$ 을 의미한다 $\rightarrow$ 유일성

5. 선형연립방정식의 해

✚ 선형연립방정식에 대한 기본 정리

◆ 무수히 많은 해 (infinitely many solutions)

● $r < n$ 이면 r 개의 미지수를 $n-r$ 개의 다른 미지수로 표현

◆ 증명

● 행렬 $\mathbf{A}$ 의 계수가 r 이므로 r 개의 열벡터 $\mathbf{c}_{(1)}, \dots, \mathbf{c}_{(r)}$ 가 1차 독립이다. 다른 열벡터는 이 열벡터의 합으로 표현할 수 있으므로

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \mathbf{c}_{(2)}x_2 + \dots + \mathbf{c}_{(r)}x_r + \mathbf{c}_{(r+1)}x_{r+1} + \dots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{b}$$

$$\therefore \mathbf{c}_{(1)}y_1 + \mathbf{c}_{(2)}y_2 + \dots + \mathbf{c}_{(r)}y_r = \mathbf{b} \quad y_i = x_i + \beta_j$$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

✚ 역행렬과 Gauss-Jordan 소거법을 이해한다

✚ 역수 vs 역행렬

◆ 역수

● 어떤 실수: a

$$ab = ba = 1 \quad b = \frac{1}{a} = a^{-1} \quad a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$$

◆ 역행렬

● 어떤 행렬: $\mathbf{A}$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \quad \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

● $n \times n$ 정방행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 의 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

✚ n 차 행렬 $\mathbf{A}$ 가 역행렬을 가진다

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{Ix} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

◆ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 에서 유일한 해가 존재한다

◆ $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$

● 행렬 $\mathbf{A}$ 의 각 행은 독립적이다

◆ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

◆ $\mathbf{A}$ 는 정칙행렬 (Nonsingular matrix)

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

✚ n 차 행렬 $\mathbf{A}$ 가 역행렬을 가지지 않는다

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

- ◆ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 에서 무한한 해가 존재하거나 혹은 해가 존재하지 않는다
- ◆ $\text{rank}(\mathbf{A}) < n$
 - 적어도 한 행은 독립적이지 못하다
- ◆ $\det(\mathbf{A}) = 0$
- ◆ $\mathbf{A}$ 는 특이행렬 (Singular matrix)

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

예제

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = ?$$

$$\det(\mathbf{A}) = 0$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 4a & 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ◆ 만족하는 a, b 가 존재하지 않는다
- ◆ 따라서, $\mathbf{A}$ 는 특이 행렬이다

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

예제

$$d_1 + d_4 = 0$$

$$d_1 + d_2 = 0$$

$$d_2 + d_3 = 0$$

$$d_3 + d_4 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

- $\det(\mathbf{A})=0$

- $[0, 0, 0, 0]$ 이외의 해가 존재한다

- $[d_1=1, d_2=-1, d_3=1, d_4=-1] \neq 0$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

✚ Gauss-Jordan 소거법

◆ 역행렬(Inverse matrix)을 구하는 방법

- $\mathbf{A}$ 에 $\mathbf{I}$ 를 첨가한 행렬을 만든다
- 가우스 소거법으로 $\mathbf{A}$ 를 $\mathbf{I}$ 로 변환한다
- 이 때 $\mathbf{I}$ 에서 변화한 것이 바로 $\mathbf{A}^{-1}$ 가 된다

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \ : \ \mathbf{I}] \longrightarrow [\mathbf{I} \ : \ \mathbf{K}] \quad \therefore \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow [\mathbf{A} \ \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

1행 $\times 3 + 2$ 행

1행 $\times (-1) + 3$ 행

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

2행 $\times (-1) + 3$ 행

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

1행 $\times (-1)$, 2행 $\times 0.5$, 3행 $\times (-0.2)$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array} \right]$$

3행 $\times (-3.5)$ + 2행

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array} \right]$$

3행 $\times 2$ + 1행

2행 + 1행

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array} \right]$$

$\longrightarrow \mathbf{A}^{-1}$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

예제

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & -4 & 19 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 19 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

예제

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 19 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

◆ 대각행렬의 역행렬

● 대각행렬 $\mathbf{A}=[a_{jk}]$ 의 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$ 존재

– $a_{jj} \neq 0$ ($j=1, 2, \dots, n$)

● $\mathbf{A}^{-1}$ 는 $1/a_{11}, \dots, 1/a_{nn}$ 이 대각원소인 행렬

✚ 문제

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

◆ 역행렬이 존재한다면 유일하다

● C, D 가 A 의 두 역행렬이라고 하면

$$- AD = DA = CA = AC = I$$

$$- C = CI = C(AD) = (CA)D = ID = D$$

◆ 두 행렬의 곱

● $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$

$$- (AC)(AC)^{-1} = I$$

$$- (AC)(C^{-1}A^{-1}) = A(CC^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

● $(AC...PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}... C^{-1}A^{-1}$

◆ 역행렬의 역행렬

● $(A^{-1})^{-1} = A$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

예제

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & -15 & 5 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

✚ 역행렬 성질

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^T = \left(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}\right)^T = \mathbf{A}^T \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} \mathbf{I} = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} \mathbf{A}^T \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

$$\therefore \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

$$\left(\mathbf{A}^2\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^2$$

$$\left(\mathbf{A}^n\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^n$$

7. 역행렬, Gauss-Jordan 소거법

+ 행렬의 곱에 대한 특이성질: 약분법

◆ 행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않는다

● $AB \neq BA$

◆ $AB=0$ 일 때, $A=0$ 혹은 $B=0$ 이 아닐 수 있다

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆ $AC=AD$ 일 때, $C \neq D$ 일 수 있다 (심지어 $A \neq 0$ 일 때에도)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$