

선형변환

다음의 관계를 만족하는 변환을 선형변환이라 정의한다.

$$T(cv+dw) = cT(v) + dT(w) \quad \text{여기서 } v, w \text{는 벡터, } c, d \text{는 스칼라}$$

선형변환이 아닌 경우(1)

$$T(v) = v + v_0 \quad \because T(2v) = 2v + v_0 \neq 2T(v)$$

선형변환이 아닌 경우(2)

$$T(v) = \|v\| \quad \because T(cv) \neq cT(v), \text{ if } c < 0$$

선형변환인 경우(1)

$$T(v) = Av, \text{ 여기서 } A \text{는 행렬} \quad A(v+w) = A(v) + A(w), \quad A(cv) = cA(v)$$

선형변환인 경우(2)

$$T: R^3 \rightarrow R^2 \quad ; \quad T(v) = A_{(2 \times 3)}v \quad \text{즉 3차원공간에서 2차원공간으로 변환}$$

좌표변환 행렬

기저 $v_1, v_2, \dots, v_n \in R^n$ 공간의 좌표값을 기저 $w_1, w_2, \dots, w_m \in R^m$ 공간의 좌표값으로 변환하는 행렬 A 는 다음과 같이 구한다.

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n \in R^n$$

$$T(v) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \dots + c_nT(v_n) = [T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = Ac$$

$$\text{여기서 } T(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{mi}w_m$$

좌표변환 행렬예1

입력과 출력이 같은 R^2 직교좌표계에서 임의의 벡터를 $v_1(x\text{축})$ 기저로 정사영하는 투영행렬 변환을 구하면 다음과 같다.

$$\text{임의의 벡터 } v = c_1v_1 + c_2v_2 \in R^2 \text{ 라 두면, } T(v) = T(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1v_1 + 0$$

투영행렬 A 는 다음과 같다.

$$Ac = [T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T(v_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 이므로 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Ac = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

좌표변환 행렬예2

위와 같은 조건에서 임의의 벡터를 45°직선에 투영하는 행렬을 구하면 다음과 같다.

기저 $v_1 = w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 로 두면 투영행렬공식에 의하면

$$P = \frac{aa^T}{a^T a} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{여기서 } a = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

또는

$$P = [T(v_1), T(v_2)] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}; \text{ 그래프를 그려서 기저를 45선에 투영하여 값구함}$$

좌표변환 행렬예3

$$T = \frac{d}{dx} \text{를 미분연산자로 정의하면 } T(c_1 + c_2x + c_3x^2) = c_2 + 2c_3x$$

위의 변환은 입력은 기저 $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$ 3차원공간에서 출력은 기저 $w_1 = 1, w_2 = x$ 인 2차원공간으로 선형변환이다. 선형변환행렬 A은 다음과 같다.

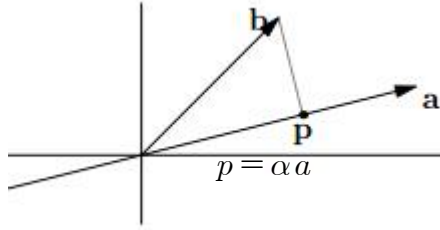
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 2c_3 \end{bmatrix}$$

두 번의 선형변환은 행렬곱으로 표시된다.

$$T_1 : v \rightarrow Av \quad T_2 : w \rightarrow Bw \Rightarrow T_1 \circ T_2 : x \rightarrow BAx$$

투영행렬과 최소제곱법

투영



벡터 b 를 벡터 a 에 정사영(투영)시킨 p 벡터를 구하기 위해서는 다음과 같은 직교성질을 이용하여 구할 수 있다.

$$a^T(b - \alpha a) = 0, \quad \alpha a^T a = a^T b, \quad \alpha = \frac{a^T b}{a^T a} \quad p = \alpha a = a \frac{a^T b}{a^T a}$$

투영행렬(Projection matrix)

$$\text{투영 벡터 : } p = Pb, \quad \text{투영 행렬 : } P = \frac{aa^T}{a^T a}$$

투영행렬의 성질

1. 대칭행렬 $P^T = P$
2. 투영의 제곱은 그 자신이다. $P^2 = P$

최소제곱법(Least Squares)

R^3 공간에서 임의의 벡터 b 를 R^2 평면공간에 가장 근접한 투영벡터 p 를 구하기 위해서는 다음과 같이 직교성질을 이용하여 구할 수 있다. R^2 평면공간의 기저를 a_1, a_2 로 표시하면 투영벡터 $p = \hat{x}_1 a_1 + \hat{x}_2 a_2 = A\hat{x}$ 로 표시 할 수 있다.

에러벡터 $e = b - p = b - A\hat{x}$ 는 평면공간에 수직이다. 즉,

$$a_1^T(b - A\hat{x}) = 0, \quad a_2^T(b - A\hat{x}) = 0 \rightarrow A^T(b - A\hat{x}) = 0$$

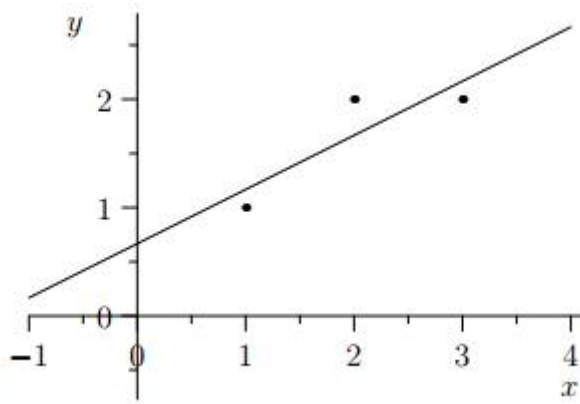
$$A^T(b - A\hat{x}) = 0, \quad A^T A\hat{x} = A^T b, \quad \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

그러므로 투영벡터 $p = A\hat{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b$, 투영행렬 $P = A(A^T A)^{-1} A^T$

최소제곱법예제

다음과 같이 주어진 데이터를 지나는 회귀 직선방정식을 구하라

주어진 데이터 (1,1), (2,2), (3,2) 회귀직선식: $y = c + mx$



해) 주어진 데이터를 회귀직선식에 대입하면

$$c+m=1$$

$$c+2m=2$$

$$c+3m=2$$

$$\text{행렬 형태: } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}, Ax = b$$

주어진 b벡터를 A행렬공간으로 투영시킨 좌표 값을 구하면 되므로

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} \therefore y = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x$$

고유값 문제

고유값 문제는 행렬 변환 Ax 에서 임의의 벡터 x 를 방향이 변하지 않고, 크기만 λx 로 변환하는 경우; $Ax = \lambda x$ 를 칭한다. 여기서 λ 를 고유값이라고 하고, λ 에 대응하는 벡터 x 를 고유벡터라고 한다.

따라서, 고유값 문제는 $(A - \lambda I)x = 0$ 이며, x 값이 자명하지 않은 해를 갖는 조건은 $(A - \lambda I)$ 가 특이행렬이어야 하므로, $\det(A - \lambda I) = 0$ 조건을 만족한다.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 일 때,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &\Rightarrow \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

또한, 특성방정식의 해를 λ_1, λ_2 라고 두면, $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$

위의 두식을 비교하면 $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = \sum_i \lambda_i$, $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 = \prod_i \lambda_i$

- 고유값 성질

1. 정방행렬 A 와 그 전치행렬 A^T 는 같은 고유값을 갖는다.

proof) 행렬식 성질에서 $\det A^T = \det A$ 이므로

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I)$$

2. 행렬 A 가 특이행렬이면, 고유값 $\lambda = 0$ 를 만족한다.

proof) 행렬 A 가 특이행렬이면 $Ax = 0$ 를 만족하는 x 벡터가 존재하므로

$$Ax = \lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

3. a) 대칭행렬 고유값은 실수이다.

b) 반대칭행렬 고유값은 순허수이다.

c) 직교행렬의 고유값은 $|\lambda| = 1$ 이다.

proof) if $A^{-1} = A^T$ (직교행렬) then $Ax = \lambda x$; $A^T Ax = \lambda A^T x \Rightarrow x = \lambda^2 x$

$$\Rightarrow x = \lambda^2 x; |\lambda| = 1$$

4. 대칭행렬의 고유벡터는 직교성질을 갖는다.

proof) $Ax_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot A^T x_2 \Rightarrow \lambda_1 x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot \lambda_2 x_2$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2, x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$$

연립차분방정식과 연립미분방정식의 해법

(1) 차분방정식

$u_{k+1} = Au_k$ 로 주어진 차분방정식의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$n = 0 : u_1 = Au_0$$

$$n = 1 : u_2 = Au_1 = A(Au_0) = A^2 u_0$$

...

$$n = k : u_k = A^k u_0 \text{ (일반해)}$$

여기서 u_0 를 A 의 고유벡터($x_1, x_2, \dots, x_n$)을 이용하여 선형결합으로 표시할 수 있다면,

$$u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$u_k = A^k u_0 = A^k (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n) = c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2 + \dots + c_n \lambda_n^k x_n$$

따라서, 차분방정식 $u_{k+1} = Au_k$ 의 일반해는 $u_k = c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2 + \dots + c_n \lambda_n^k x_n (= A^k S c)$

(예제) 마코브 과정: c 지역 인구(u_c)가 연간 m 지역으로 0.1이동하고 나머지 0.9는 잔류하며, m 지역 인구(u_m)은 연간 c 지역으로 0.2이동하고 나머지 0.8는 잔류하고 초기조건은 $u_c = 0, u_m = 1000$ 이다.

$$\begin{bmatrix} u_c \\ u_m \end{bmatrix}_{t=k+1} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_m \end{bmatrix}_{t=k}, \quad \begin{bmatrix} u_c \\ u_m \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.9 - \lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.7) = 0$$

$$\lambda = 1 \text{에 대한 고유벡터 } x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0.7 \text{에 대한 고유벡터 } x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{그러므로, 일반해는 } u_k = c_1 1^k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 (0.7)^k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c_1, c_2 를 구하기 위해서 초기조건을 대입하면,

$$\text{if } k=0, u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ then } c_1 = \frac{1000}{3}, c_2 = \frac{2000}{3}$$

(2) 미분방정식의 해법

$u' = \frac{du}{dt} = Au$ 변화율함수로 주어지는 미분방정식의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$y' = ay$ 의 미분방정식의 해가 미적분공식으로 추정하면 $y(t) = ce^{at}$ (여기서 $c = y(0)$)임을 알 수 있듯이 위의 연립미분방정식의 해는 $u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} x_n$ 임을 추정할 수 있다(여기서 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 는 A 의 고유벡터).

예를 들어 $u = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1$ 이 $\frac{du}{dt} = Au$ 의 해가 되는 것을 보이면,

$$\frac{du}{dt} = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} x_1 \text{ 이고, } Au = A c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} A x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \lambda_1 x_1 \text{ 이므로 성립된다.}$$

따라서, 연립미분방정식 $u' = \frac{du}{dt} = Au$ 의 일반해는 $u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} x_n$

또한, $\frac{du}{dt} = Au$ 인 연립미방은 각 성분에 연결된 방정식형태로 각각 성분을 분리하여 표시하려면, $u = Sv$ (행렬 S 은 A 의 고유벡터를 열벡터로 채운 행렬이다)두고 연립미방을 표시하면

$$S \frac{dv}{dt} = ASv, \quad \frac{dv}{dt} = S^{-1} ASv = \Lambda v$$

$$\text{여기서 } AS = A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = S\Lambda$$

$$AS = S\Lambda \rightarrow S^{-1} AS = \Lambda$$

따라서 일반해는 $v(t) = e^{At} v(0); \quad u(t) = S e^{At} S^{-1} u(0) = e^{At} u(0)$

$$\text{여기서 } Sc = u(0) \quad \text{또한, } e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{proof) } e^{At} &= I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \\ &= SS^{-1} + S\Lambda S^{-1}t + \frac{S\Lambda^2 S^{-1}t^2}{2!} + \dots = Se^{At}S^{-1} \end{aligned}$$

예) 2계 상미분방정식: $y'' + 4y' + 3y = 0$ 는 연립1계 미방으로 표현하여 해를 구한다.

$$\text{if } u = \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix} \text{ then } u' = \begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix} = Au$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = -1 \text{에 대한 고유벡터 } x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -3 \text{에 대한 고유벡터 } x_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{그러므로, 일반해는 } u = \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

마코브행렬과 푸리에급수

다음과 같이 모든 성분이 양수이며, 열벡터의 합이 1인 행렬을 마코브행렬(확률행렬)이라 부른다.

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.01 & 0.3 \\ 0.2 & 0.99 & 0.3 \\ 0.7 & 0.0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

위의 확률행렬은 고유값 $\lambda = 1$ 를 가지며, 이 때의 고유벡터가 정상상태를 나타낸다. 또한, 그 이외의 고유값은 $\lambda_i < 1$ 이다.

$$\text{차분방정식의 정상상태 해 } u_{k \rightarrow \infty} = A^\infty u_0 = c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2 + \dots + c_n \lambda_n^k x_n \rightarrow c_1 x_1$$

열벡터합이 1인 행렬은 왜 고유값 $\lambda = 1$ 를 갖는가? 만약에 행렬 A 의 고유값 $\lambda = 1$ 를 만족한다고 하면,

$$A - 1\lambda = \begin{pmatrix} -.9 & 0.01 & 0.3 \\ 0.2 & -.01 & 0.3 \\ 0.7 & 0.0 & -.6 \end{pmatrix} \text{는 특이행렬(행렬식}=0)이다. 왜냐하면, 각 열벡터에 1를 뺀}$$

결과 값이므로 $A - I$ 의 행렬의 행벡터합은 제로이다. 따라서 행벡터들이 서로 종속이므로 $A - I$ 는 특이행렬이다.

푸리에 급수

정규직교기저를 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ 이라고 하면, 임의 벡터 v 는

$$v = x_1 q_1 + x_2 q_2 + \dots + x_n q_n = Qx = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

$$\text{성분 } x_i = q_i^T v = x_1 q_i^T q_1 + x_2 q_i^T q_2 + \dots + x_n q_i^T q_n$$

위의 성질을 함수공간에 적용하면 다음과 같이 푸리에급수를 구할 수 있다.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

여기서 $\cos x, \sin x$ 함수는 직교함수이다.

$$\text{두 삼각함수의 내적을 구하면 } f^T g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} (\sin x)^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

푸리에 급수의 계수는 다음과 같이 직교성질을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

$$a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad ; \quad \text{함수평균값 2배}$$

$$a_k = \langle f, \cos kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad b_k = \langle f, \sin kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

예를 들면, a_1 계수를 구하기 위해서는

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle f, \cos x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots) \cos x dx \\ &= \frac{1}{\pi} (0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos^2 x dx + 0 + 0 + \dots) = \frac{1}{\pi} a_1 \pi = a_1 \end{aligned}$$

예제1) $[0, 2\pi]$ 구간에서 $f(x) = x$ 의 최소제곱근사(푸리에급수)를 구하라. 단 2차식근사

$$\text{풀이)} \quad a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx = -\frac{2}{k}$$

$$\text{그러므로, } x \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x = \pi - 2 \sin x - \sin 2x$$